Fluid ﬂow simulation is a highly active area with applications in a wide range of engineering problems and interactive systems. Meshless methods like the Moving Particle Semi-implicit (MPS) are a great alternative to deal efﬁciently with large deformations and free-surface ﬂow. However, mesh-based approaches can achieve higher numerical precision than particle-based techniques with a performance cost. This paper presents a numerically stable and parallelized system that beneﬁts from advances in the literature and parallel computing to obtain an adaptable MPS method.The proposed technique can simulate liquids using different approaches, such as two ways to calculate the particles’ pressure, turbulent ﬂow, and multiphase interaction. The method is evaluated under traditional tests cases presenting comparable results to recent techniques. This work integrates the previously mentioned advances into a single solution, which can switch on improvements, such as better momentum conservation and less spurious pressure oscillations, through a graphical interface. The code is entirely open-source under the GPLv3 free software license. The GPU-accelerated code reached speedups ranging from 3 to 43 times, depending on the total number of particles. The simulation runs at one fps for a case with approximately 200, 000 particles. Code

Моделирование потока жидкости - это очень активная область с приложениями в широком спектре инженерных задач и интерактивных систем. Методы без сетки, такие как полунеявный метод движущихся частиц (MPS), являются отличной альтернативой для эффективной работы с большими деформациями и потоком со свободной поверхностью. Однако подходы, основанные на сетке, могут обеспечить более высокую численную точность, чем методы, основанные на частицах, с меньшими затратами на производительность. В этой статье представлена численно устойчивая и распараллеленная система, которая извлекает выгоду из достижений в литературе и параллельных вычислений для получения адаптируемого метода MPS.Предлагаемая методика может моделировать жидкости с использованием различных подходов, таких как два способа расчета давления частиц, турбулентного потока и многофазного взаимодействия. Метод оценивается в рамках традиционных тестовых случаев, дающих сопоставимые результаты с новейшими методами. Эта работа объединяет ранее упомянутые достижения в единое решение, которое может включать улучшения, такие как лучшее сохранение импульса и уменьшение паразитных колебаний давления, с помощью графического интерфейса. Код полностью с открытым исходным кодом под лицензией свободного программного обеспечения GPLv3. Код, ускоренный графическим процессором, достиг ускорения в диапазоне от 3 до 43 раз, в зависимости от общего количества частиц. Моделирование выполняется со скоростью один кадр в секунду для случая с примерно 200 000 частицами. Код

Some of the most common problems in naval hydrodynamics involve the study of ﬂuid ﬂow. For this, it is necessary to deal with large deformations near the surface, such as those presented in a good portion of computational mechanics problems [1]. Also, Computer Graphics (CG) and Virtual Reality (VR) applications are constantly turning more realistic and interactive/real-time ﬂuid simulations have been a frequent research topic in that area [2, 3, 4]. Conventional techniques, as the Finite Element Methods (FEM) and Finite Difference Methods (FDM) are relatively inefﬁcient when dealing with large deformations [5] [6]. As an alternative, there are the Lagrangian meshfree or the particle-based methods. They achieve ﬂexibility in situations where the classic techniques are too complex [7]. Two of the meshless techniques are the Moving Particle Semi-implicit method (MPS) [8] and the Smoothed Particle

Hydrodynamics (SPH) [9] [10], the latter initially intended to astrophysics applications and then adapted to ﬂuid simulation. The MPS authors idealized it to simulate the ﬂows of incompressible ﬂuids, which refers to a ﬂuid whose material density is constant within a ﬂuid parcel, a property found in liquids. Its main difference from the original SPH, which can be considered an advantage for the MPS regarding numerical precision, is that the calculations adopt a semi-implicit predictor-corrector model [8]. However, the SPH is more prevalent in CG and VR applications due to the high computational load occasioned by the MPS calculations, including solving the Poisson Pressure Equation (PPE).

In [11], the authors highlight the current achievements and future perspectives for projection-based particle methods, which are the ones that require solving a PPE. In it, the authors present a set of papers regarding the applicability of the MPS in ocean engineering, including wave breaking [12] [13], wave overtopping [14], wave impact [15] [16], green water on ships [17], sediment transport [18], waves generated through landslide [19] and ﬂuid-structure interactions [20] [21].

Некоторые из наиболее распространенных проблем в морской гидродинамике связаны с изучением течения жидкости. Для этого необходимо иметь дело с большими деформациями вблизи поверхности, такими как те, которые представлены в значительной части задач вычислительной механики [1]. Кроме того, приложения компьютерной графики (CG) и виртуальной реальности (VR) постоянно становятся все более реалистичными, и моделирование жидкостей в интерактивном режиме / в реальном времени является частой темой исследований в этой области [2, 3, 4]. Обычные методы, такие как методы конечных элементов (FEM) и методы конечных разностей (FDM), относительно неэффективны при работе с большими деформациями [5] [6]. В качестве альтернативы существуют лагранжевы методы без сетки или методы, основанные на частицах. Они достигают гибкости в ситуациях, когда классические методы слишком сложны [7]. Двумя из методов без сетки являются Полунеявный метод движущихся частиц (MPS) [8] и Сглаженная частица

Гидродинамика (SPH) [9] [10], последняя первоначально предназначалась для приложений астрофизики, а затем была адаптирована для моделирования жидкостей. Авторы MPS идеализировали его для моделирования потоков несжимаемых жидкостей, что относится к жидкости, плотность материала которой постоянна в пределах участка жидкости, свойство, присущее жидкостям. Его основное отличие от оригинального SPH, которое можно считать преимуществом для MPS в отношении точности числовых данных, заключается в том, что в расчетах используется полуявная модель предиктора-корректора [8]. Однако SPH более распространен в приложениях CG и VR из-за высокой вычислительной нагрузки, вызванной вычислениями MPS, включая решение уравнения давления Пуассона (PPE).

В [11] авторы освещают текущие достижения и будущие перспективы методов частиц на основе проекции, которые требуют решения СИЗ. В нем авторы представляют ряд работ, касающихся применимости MPS в океанотехнике, включая преодоление волн [12] [13], преодоление волн [14], воздействие волн [15] [16], зеленую воду на судах [17], перенос отложений [18], волны, возникающие в результате оползня [19] и взаимодействия флюидной структуры [20] [21].

One of the main issues of meshfree methods, in general, are in the spurious pressure oscillation of the particles [15]. Another disadvantage of particle-based approaches that rely on numerical precision is the application runtime [22]. Works found in the literature provide various kinds of performance speedups using a General Purpose Graphics Processing Unit (GPGPU) but always focusing on the standard MPS [23, 22, 24].

The system developed in this work allows combining numerical improvements to the MPS with different types of ﬂuid ﬂows. These include multiphase and viscoplastic simulations and parallel computation at different levels: multithreaded CPU and GPU. A ﬁne-tuning of these combinations are available through a graphical user interface. It also allows the simulation of dam break cases, ﬂood simulations, oil spilling disasters, and others with decent precision in less time. These features help to achieve general requirements in which precision and or time are somewhat relevant factors.

This research aims to provide a numerically enhanced MPS method implementation compared to its standard one, as well as expand the simulation tuning possibilities for different types of ﬂuids and situations. Additionally, CPU and GPU parallelization are also provided, so more signiﬁcant cases can reach interactive simulation and real-time rates. Modify and add new models to the system is straightforward. The resulting solution can assist in engineering problems regarding natural and environmental disasters in coastal and ﬂoodable areas. It can also be used in CG and VR, and, for some cases, real-time applications.

Одна из главных проблем безсеточных методов, в целом, заключается в паразитных колебаниях давления частиц [15]. Еще одним недостатком подходов, основанных на частицах, которые полагаются на численную точность, является время выполнения приложения [22]. Работы, найденные в литературе, обеспечивают различные виды ускорения производительности с использованием графического процессора общего назначения (GPGPU), но всегда ориентированы на стандартные MPS [23, 22, 24].

Система, разработанная в этой работе, позволяет комбинировать численные улучшения MPS с различными типами потоков жидкости. К ним относятся многофазное и вязкопластичное моделирование и параллельные вычисления на разных уровнях: многопоточный процессор и графический процессор. Точная настройка этих комбинаций доступна через графический пользовательский интерфейс. Он также позволяет моделировать случаи прорыва плотин, моделирование наводнений, катастрофы с разливом нефти и другие с достаточной точностью за меньшее время. Эти функции помогают выполнить общие требования, в которых точность и/или время являются в некоторой степени важными факторами.

Это исследование направлено на обеспечение численно улучшенной реализации метода MPS по сравнению со стандартным, а также на расширение возможностей настройки моделирования для различных типов жидкостей и ситуаций. Кроме того, также обеспечивается распараллеливание ЦП и графического процессора, поэтому в более значительных случаях можно достичь скорости интерактивного моделирования и реального времени. Изменять и добавлять новые модели в систему несложно. Полученное решение может помочь в решении инженерных проблем, связанных со стихийными и экологическими бедствиями в прибрежных и затопляемых районах. Его также можно использовать в CG и VR, а в некоторых случаях и в приложениях реального времени.

An unprecedented parallelization of an improved MPS version coupled with ﬂuid models, such as turbulent and multiphase ﬂow, is developed to run in CPU, through OpenMP [25], and in GPU, by using CUDA [26]. The tunable parameters are:

1. Multiple computational methods such as different pressure calculation approaches, different values for the kinematic viscosity, turbulent ﬂow, and multiphase interaction;

2. Improvements such as better momentum conservation, more precise discretization of differential operators and less spurious pressure oscillations;

3. Choose between parallelized implementations using OpenMP and CUDA;

4. Interactive rates for simulations containing 10 5 particles.

The code is open-source, available to the community under the GNU General Public License v3.0 (GPLv3) license. There is also a README ﬁle with a detailed step-by-step installation description and information on how to use the developed system.

Беспрецедентное распараллеливание улучшенной версии MPS в сочетании с моделями жидкостей, такими как турбулентный и многофазный поток, разработано для работы в ЦП через OpenMP [25] и в графическом процессоре с использованием CUDA [26]. Настраиваемыми параметрами являются:

1. Несколько вычислительных методов, таких как различные подходы к расчету давления, различные значения кинематической вязкости, турбулентного потока и многофазного взаимодействия;

2. Улучшения, такие как лучшее сохранение импульса, более точная дискретизация дифференциальных операторов и меньшее количество паразитных колебаний давления;

3. Выберите между параллельными реализациями с использованием OpenMP и CUDA;

4. Интерактивные ставки для моделирования, содержащего 10 5 частиц.

Код с открытым исходным кодом, доступный сообществу в соответствии с лицензией GNU General Public License v3.0 (GPLv3). Существует также файл README с подробным пошаговым описанием установки и информацией о том, как использовать разработанную систему.

In the second section, there is a contextualization on the area, presenting modiﬁcations to the method over the years and acceleration techniques. Then, there is a section explaining the used technique and presenting a set of variations, improvements, and applications. Afterwards, there is an explanation regarding implementation, acceleration structures 2and user interface. Next, the main results are showcased, presenting each test case utilized, and their purpose. In the test cases section, a discussion is performed through a comparison with the results found in the literature. Subsequently, there is a performance analysis of CPU and GPU versions, memory usage, the speedups provided by the GPU parallelization, and the simulation frame rate. Finally, there is a discussion of ﬁnal remarks and future works.

Во втором разделе приводится контекстуализация области, в которой представлены изменения метода за прошедшие годы и методы ускорения. Затем есть раздел, объясняющий используемую технику и представляющий набор вариаций, улучшений и приложений. После этого дается объяснение относительно реализации, структур ускорения и пользовательского интерфейса. Затем демонстрируются основные результаты, в которых представлен каждый используемый тестовый случай и их назначение. В разделе "Тестовые примеры" обсуждение проводится путем сравнения с результатами, приведенными в литературе. Впоследствии проводится анализ производительности версий ЦП и графического процессора, использования памяти, ускорений, обеспечиваемых распараллеливанием графического процессора, и частоты кадров моделирования. Наконец, идет обсуждение заключительных замечаний и будущих работ.

**2 Related works**

Through the years, disasters involving natural phenomena have triggered research in different areas on how to avoid them. Fluid simulation focusing on liquids is one of these areas. To be able to simulate liquids coherently, meshless methods usually model the ﬂuid ﬂow as Weakly Compressible (WC) and Fully Incompressible (FI), which guarantees less ﬂuid density oscillations. The MPS has also been providing signiﬁcant assistance in that ﬁeld since it intrinsically simulates incompressible ﬂows [27]. The textbook chapter of Almeida et al. [28] is an introduction on the subject since it provides a thorough explanation of the MPS as well as some variations and implementation details.

Despite the high level of applicability of the MPS, as shown in the previous section, there are only a few solutions or software that use this method, such as MPS-RYUJIN [29], Particleworks [30] and MPARS [31]. Refs. [29] [30] are not open-source and Ref. [31] does not provide any kind of parallelization, as opposed to the present work. Although there are other frameworks for ﬂuid simulation, some of them being widely used, such as the DualSPHysics [32] and GPUSPH [33], they mainly focus on the SPH and its variations.

**2 Сопутствующие работы**

На протяжении многих лет стихийные бедствия, связанные с природными явлениями, стимулировали исследования в различных областях о том, как их избежать. Моделирование жидкостей с упором на жидкости является одной из таких областей. Чтобы иметь возможность когерентно моделировать жидкости, методы без сетки обычно моделируют поток жидкости как Слабо сжимаемый (WC) и Полностью несжимаемый (FI), что гарантирует меньшие колебания плотности жидкости. MPS также оказывает значительную помощь в этой области, поскольку она по своей сути имитирует несжимаемые потоки [27]. Глава учебника Алмейды и др. [28] является введением по этому вопросу, поскольку в нем содержится подробное объяснение MPS, а также некоторые вариации и детали реализации.

Несмотря на высокий уровень применимости MPS, как показано в предыдущем разделе, существует лишь несколько решений или программного обеспечения, использующих этот метод, таких как MPS-RYUJIN [29], Particleworks [30] и MPARS [31]. ReFS. [29] [30] не являются открытым исходным кодом, и ссылка [31] не обеспечивает какого-либо распараллеливания, в отличие от настоящей работы. Хотя существуют и другие платформы для моделирования жидкостей, некоторые из которых широко используются, такие как DualSPHysics [32] и GPUSPH [33], они в основном сосредоточены на SPH и его вариациях.

**2.1 Modiﬁcations to the method**

Similar to the other meshfree methods, the MPS technique suffers from instability problems. Some of these issues are related to numerical errors at the boundaries, i.e., free-surfaces or solid boundaries interactions. Some works document and discuss the reasons for those problems [34] [16]. As an attempt to overcome these issues, some authors proposed changes to the method throughout the years; one of the most critical issues with the MPS is the spurious pressure oscillation. This subsection presents some of the works that successfully addressed those issues.

A set of papers by Khayyer & Gotoh presents valuable insights and improvements to this problem, most of them proposing corrected differential operator models (Laplacian and gradient). [15] proposes modiﬁcations to the MPS to diminish spurious pressure ﬂuctuations. The authors introduce a new formulation of the source term of the PPE, which is referred to as a Higher order Source term (HS), thus creating the CMPS-HS after combining this modiﬁcation with their previous work. The authors in [35] focus on the Laplacian model used in the MPS. They derive a Higher order Laplacian model (HL) for the discretization of the Laplacian operator to reﬁne further and stabilize the pressure calculation. Both Laplacian of pressure and the one corresponding to the viscous forces beneﬁt from this model. The authors remarked that, although the modiﬁcations improve pressure calculations, the numerical results still presented some unphysical numerical oscillation during tests.

Khayyer & Gotoh [36] present two new modiﬁcations to resolve the shortcomings present in the method from their previous work. The ﬁrst improvement deals with unphysical numerical oscillation caused by the source term in the PPE. Due to that issue, additional terms were added to it, referred by Error Compensating parts in the Source term of the PPE (ECS). The other change deals with situations with tensile instability [37]. It consists of a corrective matrix inserted in the pressure gradient calculations to achieve a more accurate approximation of the differential operator in question. The modiﬁcations here presented are going to be detailed further in section 3.

In [38], the authors show the latest advances related to particle methods applied to coastal and ocean engineering, where they also include fully explicit methods. In one of them, Tayebi & Jin [39] proposes the Moving Particle Explicit (MPE) that solves an equation of state in a fully explicit form to obtain the particles’ pressure. Other recent applications of the MPS brought up by the referred review are related to oil spilling [40] and the swash beach process [41]. In the present work, a fully explicit version of the MPS is studied, implemented, and accelerated.

**2.1 Изменения в методе**

Подобно другим методам без сетки, метод MPS страдает проблемами нестабильности. Некоторые из этих проблем связаны с численными ошибками на границах, т.Е. взаимодействиями свободных поверхностей или сплошных границ. В некоторых работах документируются и обсуждаются причины этих проблем [34] [16]. В качестве попытки преодолеть эти проблемы некоторые авторы предлагали изменения в методе на протяжении многих лет; одной из наиболее важных проблем с MPS является паразитное колебание давления. В этом подразделе представлены некоторые работы, в которых успешно решались эти проблемы.

В ряде работ Хайера и Гото представлены ценные идеи и улучшения этой проблемы, в большинстве из которых предлагаются скорректированные модели дифференциальных операторов (лапласиан и градиент). [15] предлагает внести изменения в MPS, чтобы уменьшить паразитные колебания давления. Авторы вводят новую формулировку исходного термина PPE, который называется термином источника более высокого порядка (HS), создавая таким образом CMPS-HS после объединения этой модификации с их предыдущей работой. Авторы в [35] фокусируются на модели Лапласа, используемой в MPS. Они выводят модель Лапласа более высокого порядка (HL) для дискретизации оператора Лапласа для дальнейшего уточнения и стабилизации расчета давления. От этой модели выигрывают как лапласиан давления, так и тот, который соответствует вязким силам. Авторы отметили, что, хотя модификации улучшают расчеты давления, численные результаты все еще демонстрируют некоторые нефизические численные колебания во время испытаний.

Хайер и Гото [36] представляют две новые модификации для устранения недостатков, присущих методу из их предыдущей работы. Первое улучшение касается нефизических числовых колебаний, вызванных исходным термином в СИЗ. В связи с этой проблемой к нему были добавлены дополнительные термины, на которые ссылаются части, компенсирующие ошибки, в Исходном термине СИЗ (ECS). Другое изменение касается ситуаций с нестабильностью при растяжении [37]. Он состоит из корректирующей матрицы, вставленной в расчеты градиента давления для достижения более точной аппроксимации рассматриваемого дифференциального оператора. Представленные здесь изменения будут подробно описаны далее в разделе 3.

В [38] авторы показывают последние достижения, связанные с методами частиц, применяемыми в прибрежной и океанической инженерии, где они также включают полностью явные методы. В одном из них Тайеби и Джин [39] предлагают явное выражение движущихся частиц (MPE), которое решает уравнение состояния в полностью явной форме для получения давления частиц. Другие недавние заявления депутатов, поднятые в упомянутом обзоре, связаны с разливом нефти [40] и процессом swash beach [41]. В настоящей работе изучается, внедряется и ускоряется полностью явная версия MPS.

**2.2 Acceleration**

Since the MPS is fully meshless, the particles are not connected explicitly by any edge, so, it is possible to optimize some computational aspects of the simulation, such as by parallelization, by cluster technology or General Purpose GPU (GPGPU) techniques [42]. Shakibaeinia et al. [43] [44] presented an alternative form of the MPS, where they incorporate more straightforward and effective formulations and ﬂuid behaviours/ﬂows models into the method. One of the advantages of doing so is to beneﬁt from the MPS’ numerically precise formulations without the main efﬁciency bottleneck, which is the Poisson pressure equation’s solution.

Поскольку MPS полностью лишен сетки, частицы явно не соединены каким-либо ребром, поэтому можно оптимизировать некоторые вычислительные аспекты моделирования, такие как распараллеливание, кластерная технология или методы GPU общего назначения (GPGPU) [42]. Shakibaeinia и др. [43] [44] представили альтернативную форму MPS, в которой они включают в метод более простые и эффективные формулировки и модели поведения /потоков жидкости. Одним из преимуществ этого является использование численно точных формулировок MPS без основного узкого места в эффективности, которое является решением уравнения давления Пуассона.

Shakibaeinia and Jin [48] developed a technique based on the MPS interaction model in which a WC model replaces the FI one. By doing this, they decrease the necessary computation time. In Ref. [44], the authors extended their previous work by proposing a straightforward model of an immiscible multiphase method. They also employ and investigate different techniques for the viscosity model. In order to address turbulence issues in wave dynamics, they use the Large Eddy Simulation (LES) concept to formulate a sub-particle scale (SPS) turbulence model. The modifications mentioned above are studied and taken into consideration in the present work.

Hori et al. [28] developed a GPU-accelerated version of MPS using CUDA. The authors focused on the search of neighbouring particles and the iterative solution of the linear system generated by the PPE, which generates a considerable computational load. They optimize the neighbouring particles search through a cell grid, in which there is a specific cell for each particle according to the particle's position. To compare accuracy and performance between the CPU and GPU-based codes, they execute 2-dimensional calculations of an elliptical drop evolution and a dam break flow. Finally, the reported speedup achieved is about 3 to 7 times. These speedup rates serve as comparison reference here.

In Ref. [24], the authors focus on reducing the MPS runtime by replacing how the method calculates the particles' pressure. Instead of using a PPE, they implement an equation of state, similar to the work of Shakibaeinia and Jin. It also aims to accelerate it by exploring its parallelization potential through a multi-core CPU, single-node GPU, and a multi-node GPU cluster environment. The authors use a domain subdivision approach to enable a simulation with a higher number of particles. For a 3D dam break test with 700, 000 particles, the OpenMP solution could reach 5.3 times speedup, while the single-node GPU could reach 14.5 times speedup compared to a single-threaded CPU execution. The multi-node GPU with nine processes performs approximately 5.5 times faster than the single-node GPU. The authors claim that the proposed algorithm allows extensive WC-MPS simulations in distributed memory systems with reduced communication overhead. These speedup values are also a comparison reference to this work.

Шакибайния и Джин [48] разработали методику, основанную на модели взаимодействия MPS, в которой модель WC заменяет модель FI. Делая это, они сокращают необходимое время вычислений. В ссылке [44] авторы расширили свою предыдущую работу, предложив простую модель несмешивающегося многофазного метода. Они также используют и исследуют различные методы для модели вязкости. Для решения проблем турбулентности в волновой динамике они используют концепцию моделирования больших вихрей (LES) для разработки модели турбулентности в масштабе субчастиц (SPS). Упомянутые выше модификации изучены и приняты во внимание в настоящей работе.

Хори и др. [28] разработали версию MPS с ускорением GPU с использованием CUDA. Авторы сосредоточились на поиске соседних частиц и итерационном решении линейной системы, генерируемой СИЗ, что создает значительную вычислительную нагрузку. Они оптимизируют поиск соседних частиц по сетке ячеек, в которой для каждой частицы есть определенная ячейка в соответствии с положением частицы. Чтобы сравнить точность и производительность между кодами на базе ЦП и графического процессора, они выполняют двумерные вычисления эволюции эллиптического падения и потока прорыва плотины. Наконец, заявленное ускорение достигнуто примерно в 3-7 раз. Эти показатели ускорения служат здесь в качестве эталона для сравнения.

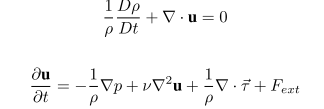
В ссылке [24] авторы сосредотачиваются на сокращении времени выполнения MPS, заменяя метод расчета давления частиц. Вместо использования СИЗ они реализуют уравнение состояния, аналогичное работе Шакибайнии и Джина[43]. Он также стремится ускорить его, исследуя потенциал распараллеливания с помощью многоядерного процессора, одноузлового графического процессора и кластерной среды с несколькими узлами GPU. Авторы используют подход разделения предметной области, чтобы обеспечить моделирование с большим числом частиц. Для 3D-теста на разрыв плотины с 700 000 частицами решение OpenMP может ускорить работу в 5,3 раза, в то время как графический процессор с одним узлом может ускорить работу в 14,5 раза по сравнению с однопоточным выполнением процессора. Многоузловой графический процессор с девятью процессами работает примерно в 5,5 раза быстрее, чем одноузловой графический процессор. Авторы утверждают, что предложенный алгоритм позволяет проводить обширное моделирование WC-MPS в системах с распределенной памятью с уменьшенными затратами на связь. Эти значения ускорения также являются сравнительной ссылкой на эту работу.

Unlike the works here presented, this work not only focuses on applying parallelization to the MPS calculations but also applying it to the added improvements and modifications. This combination of features is unprecedented. Besides, both parallelized versions (OpenMP and CUDA) can achieve speedups regarded to the MPS variations developed. Exemplifying, one set up of features can praise for stability and higher accuracy, while another may seek for higher performance.

**3 The Moving Particle Semi-implicit Method**

The MPS uses discrete elements called particles in which each of them carries a set of physical quantities. Since the fluid flow governing equations are for continuous domains, the continuous differential operators, such as the derivative, gradient, and Laplacian, need to be discretized. The MPS proposes discretized models to these operators. In this section, the method is detailed by showing its governing equations, discretized differential operations, and a set of variations and improvements to the standard MPS.

**3.1 Standard method & Governing equations**

Koshizuka and Oka [8]] models the fluid as a set of interacting particles, in which their motion is determined through the interaction with neighbouring particles and the governing equations of fluid motion. [Equation Tand Equation 2 are the continuity equation and Navier-Stokes equation, respectively, which describe the motion of one viscous fluid flow. 

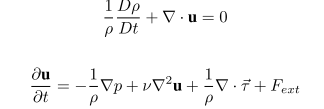
where u is the ﬂuid velocity vector, t is the time, ρ is the ﬂuid density, p is the pressure, ν is the laminar kinematic viscosity, τ is the sub-particle scale (SPS) or turbulence contributed by unresolved small motions (detailed in subsubsection 3.2.2) and F ext represent external forces like gravity.

В отличие от представленных здесь работ, эта работа не только фокусируется на применении распараллеливания к вычислениям MPS, но и применяет его к добавленным улучшениям и модификациям. Такое сочетание функций является беспрецедентным. Кроме того, обе распараллеленные версии (OpenMP и CUDA) могут обеспечить ускорение по сравнению с разработанными вариантами MPS. Например, один набор функций может похвалить за стабильность и более высокую точность, в то время как другой может стремиться к более высокой производительности.

**3 Полунеявный метод движущихся Частиц**

MPS использует дискретные элементы, называемые частицами, в которых каждая из них несет набор физических величин. Поскольку уравнения, управляющие потоком жидкости, предназначены для непрерывных областей, непрерывные дифференциальные операторы, такие как производная, градиент и лапласиан, должны быть дискретизированы. MPS предлагает этим операторам дискретизированные модели. В этом разделе метод подробно описан, показаны его управляющие уравнения, дискретизированные дифференциальные операции и набор вариаций и улучшений стандартного MPS.

**3.1 Стандартный метод и управляющие уравнения**

Кошизука и Ока [8]] моделируют жидкость как набор взаимодействующих частиц, в которых их движение определяется взаимодействием с соседними частицами и управляющими уравнениями движения жидкости. [[Уравнение и уравнение 2 являются уравнением непрерывности и уравнением Навье-Стокса соответственно, которые описывают движение одного потока вязкой жидкости. 

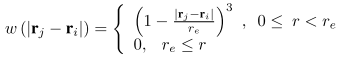
где u - вектор скорости жидкости, t - время, ρ - плотность жидкости, p - давление, ν - ламинарная кинематическая вязкость, τ - масштаб субчастиц (SPS) или турбулентность, обусловленная неразрешенными малыми движениями (подробно описано в подразделе 3.2.2), и F ext представляют внешние силы, такие как гравитация.

In this method, the domain is discretized into particles, as mentioned above. They interact with its neighbours through a kernel function w(r), r being the distance between two particles. A larger kernel size implies in an interaction with more particles. The system developed in this work provides a set of kernel functions to choose between them.

However, it is recommended that the kernel function proposed by [45] should be used when running a PPE (FI version),as in Equation 3.



where r e is the radius of the interaction area and r i and r j are the positions of particles i and j, respectively. When calculating the pressure through an equation of state (WC version), it is recommended to use and the kernel function proposed by [43], as in Equation 4. Those pressure calculation models are addressed further in this section.



Equation 5 deﬁnes n i , the particle number density, at the particle’s position r i , which is proportional to the neighbors number of i.



The continuity equation is satisﬁed if the particle number ensity remains constant, and this constant value is denoted by n 0 .

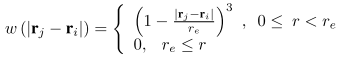
To identify a free-surface particle, the particle number density of the ith particle just needs to satisfy the condition presented in Equation 6 since on the free-surface the particle number density drops abruptly. 

В этом методе домен дискретизируется на частицы, как упоминалось выше. Они взаимодействуют со своими соседями через функцию ядра w(r), где r - расстояние между двумя частицами. Больший размер ядра подразумевает взаимодействие с большим количеством частиц. Система, разработанная в этой работе, предоставляет набор функций ядра для выбора между ними.

Однако рекомендуется использовать функцию ядра, предложенную в [45], при запуске приложений (версия FI), как в уравнении 3.



где reis - радиус области взаимодействия, а ri и rj - положения частиц i и j соответственно. При расчете давления с помощью уравнения состояния (версия WC) рекомендуется использовать и функцию ядра, предложенную [43], как в уравнении 4. Эти модели расчета давления рассматриваются далее в этом разделе.



Уравнение 5 определяет n i , плотность числа частиц, в положении частицы r i , которое пропорционально числу соседей i.



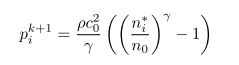
Уравнение непрерывности выполняется, если число частиц остается постоянным, и это постоянное значение обозначается n 0 .

Чтобы идентифицировать частицу со свободной поверхностью, плотность числа частиц i-й частицы просто должна удовлетворять условию, представленному в уравнении 6, поскольку на свободной поверхности плотность числа частиц резко падает. 

where β is constant between 0.8 and 0.99. The bigger β is, the bigger will be the number of particles recognized as free-surface. Koshizuka and Oka [8] recommend to set it to 0.97, and that is the value adopted here.

Generally, in meshless methods, there are two main approaches to calculate the particles’ pressure when simulatingliquids, the weakly compressible (WC) approach and the fullyincompressible (FI) one, where each one of them has its advantages and disadvantages. This work implements both approaches, providing a wide variety of features so the users can decide based on their needs. After obtaining the particles’ pressure, it is possible to compute the pressure gradient, enabling the calculations of the velocity values to update the particles’ positions through a ﬁrst-order Euler integration.

**3.1.1 Equation of state**

The WC model prioritizes performance since it severely diminishes computational load in exchange for numerical precision. In the work of [43], the traditional FI model is replaced by a WC one because assembling and solving the PPE in each step takes a considerable amount of computation time: about two-thirds of each time step for a simulation with an order of magnitude of 10 3 particles. The mentioned work replaces the PPE by an explicit relation, speciﬁcally an equation of state described by [46] and modiﬁed by [47] that is shown below. 

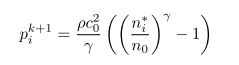
where is pressure value of particle i in timestep k + 1 and the typical value used for γ = 7. c 0 is the speed of sound. This study, in fact, shows a decrease in process time per time step while the simulation characteristics remains similar to the fully incompressible approach. Authors refer to this modiﬁed MPS as WC-MPS.

This work adopts the approach proposed by [43] due to its similarity to the weakly compressible approach adopted in the popular WCSPH [48].

где β является постоянной величиной в диапазоне от 0,8 до 0,99. Чем больше β, тем больше будет число частиц, распознанных как свободная поверхность. Кошизука и Ока [8] рекомендуют установить его равным 0,97, и это значение принято здесь.

Как правило, в методах без сетки существует два основных подхода к расчету давления частиц при моделировании жидкостей: подход со слабой сжимаемостью (WC) и подход с полной несжимаемостью (FI), где каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. В этой работе реализованы оба подхода, предоставляя широкий спектр функций, чтобы пользователи могли принимать решения в зависимости от своих потребностей. После получения давления частиц можно вычислить градиент давления, что позволяет вычислять значения скорости для обновления положения частиц с помощью интегрирования Эйлера первого порядка.

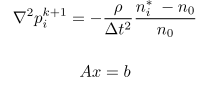
**3.1.1 Уравнение состояния**

Модель WC уделяет приоритетное внимание производительности, поскольку она значительно снижает вычислительную нагрузку в обмен на численную точность. В работе [43] традиционная модель FI заменяется моделью WC, потому что сборка и решение PPE на каждом шаге занимает значительное количество вычислительного времени: около двух третей каждого временного шага для моделирования с порядком величины 10 3 частиц. Упомянутая работа заменяет PPE явным соотношением, в частности уравнением состояния, описанным в [46] и модифицированным в [47], которое показано ниже. 

где - значение давления частицы i за время k + 1 и типичное значение, используемое для γ = 7. c0 - скорость звука. Это исследование, по сути, показывает уменьшение времени процесса на каждом временном шаге, в то время как характеристики моделирования остаются аналогичными полностью несжимаемому подходу. Авторы называют этот модифицированный MPS WC-MPS. В этой работе используется подход, предложенный [43], из-за его сходства со слабо сжимаемым подходом, принятым в популярном WCSPH [48].

**3.1.2 Poisson pressure equation**

As opposed to the weakly compressible approach, the fully incompressible model calculates the particles’ pressure with higher accuracy even though this leads to a high computational load. In this case, it is necessary to solve the quation, shown in Equation 8, which yields a linear system of equations of the type shown in Equation 9.



where A is a sparse square matrix of size N ×N which N is the total particle number in the simulation, the Right-Hand Size (RHS) vector b of size N stores the source terms and x, also of size N, represents the desired pressures of the particles.

The assemble of the coefﬁcient matrix A makes use of the discretized Laplacian model, shown in Equation 10.



where ϕ is some physical quantity, λ is the weighted average of the squared distance between particles i and j (or r 2), as shown in [8].

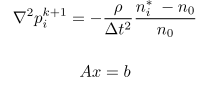
As previously mentioned in subsection 3.1, this work uses the ICCG to solve the PPE, like in [8]. It consists of submitting the coefﬁcient matrix A into the incomplete Cholesky factorization, which is generally used as preconditioning for iterative numerical methods. Afterwards, the conjugate gradient is applied to solve the linear system of equations iteratively.

**3.2 Fluid ﬂow models**

The improvement of numerical stability and the addition of different models of ﬂuid ﬂow enable a more reliable simulation in certain situations. This section presents the used set of models of ﬂuid ﬂows in this work.

**3.1.2 Уравнение давления Пуассона**

В отличие от подхода со слабой сжимаемостью, полностью несжимаемая модель вычисляет давление частиц с более высокой точностью, хотя это приводит к высокой вычислительной нагрузке. В этом случае необходимо решить уравнение, показанное в уравнении 8, которое дает линейную систему уравнений типа, показанного в уравнении 9.



где A - разреженная квадратная матрица размером N × N, где N - общее число частиц в моделировании, вектор правого размера (RHS) b размера N хранит исходные термины, а x, также размера N, представляет желаемое давление частиц.

Сборка матрицы коэффициентов A использует дискретизированную модель Лапласа, показанную в уравнении 10.



где ϕ - некоторая физическая величина, λ - средневзвешенное значение квадрата расстояния между частицами i и j (или r2), как показано в [8].

Как упоминалось ранее в подразделе 3.1, в этой работе ICCG используется для решения PPE, как в [8]. Он состоит в подаче матрицы коэффициентов A в неполную факторизацию Холески, которая обычно используется в качестве предварительной подготовки для итерационных численных методов. После этого сопряженный градиент применяется для итеративного решения линейной системы уравнений.

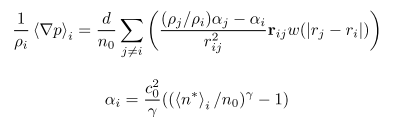
**3.2 Модели потока жидкости**

Улучшение численной стабильности и добавление различных моделей потока жидкости обеспечивают более надежное моделирование в определенных ситуациях. В этом разделе представлен используемый в данной работе набор моделей

A model that signiﬁcantly increases the number of possible applications for the MPS is the one that supports multidensity ﬂuids interaction, the multiphase ﬂow.

Shakibaeinia and Jin [44] proposed a straightforward multiphase model based on the MPS, in which it treats the system as a multi-density multi-viscosity ﬂuid. The model is only applied to a WC-MPS [43], solving a single set of equations for all phases. In this model, the density differences of particles of different phases are automatically taken care of, since that, when calculating a particle’s velocity, its density appears directly in the equations.

The main issue of this approach arises when dealing with the density discontinuity near the interface between the ﬂuids, which can result in pressure ﬁeld discontinuity. The strategy followed was to use a smoothed value of density hρi i instead of the real particles’ density, set for each particle before starting the simulation. The density of an individual particle is necessary for calculating its pressure. Equation 11 shows the multi-density pressure term in the weakly compressible compressible model applied in this study.



where d refers to the number of dimensions in the simulation and the typical value of γ = 7 is used, as in Tait’s equation of state [49].

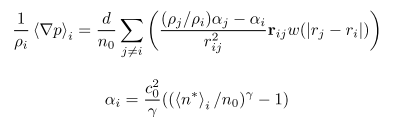
The multiphase model proposed by Shakibaeinia and Jin [44] can only be used by calculating the particles’ pressure through the equation of state, which is the WC approach. Despite that, this work adopts this model for that incompressibility model, given its relative simplicity and stability.

**.2.1 Многофазный поток**

Модель, которая значительно увеличивает число возможных применений для MPS, - это модель, которая поддерживает взаимодействие жидкостей с различной плотностью, многофазный поток.

Шакибайния и Джин [44] предложили простую многофазную модель, основанную на MPS, в которой система рассматривается как жидкость с различной плотностью и вязкостью. Модель применяется только к WC-MPS [43], решая один набор уравнений для всех фаз. В этой модели автоматически учитываются различия в плотности частиц разных фаз, поскольку при расчете скорости частицы ее плотность появляется непосредственно в уравнениях.

Основная проблема этого подхода возникает при работе с разрывом плотности вблизи границы раздела жидкостей, что может привести к разрыву поля давления. Последовавшая стратегия состояла в том, чтобы использовать сглаженное значение плотности hpi i вместо плотности реальных частиц, установленной для каждой частицы перед началом моделирования. Плотность отдельной частицы необходима для расчета ее давления. Уравнение 11 показываетчлен давления с множественной плотностью в слабо сжимаемой модели, применяемой в этом исследовании.



где d относится к числу измерений в моделировании, и используется типичное значение γ = 7, как в уравнении состояния Тейта [49].

Многофазная модель, предложенная Шакибейнией и Джином [44], может быть использована только для расчета давления частиц с помощью уравнения состояния, которое является подходом WC. Несмотря на это, в данной работе эта модель используется для этой модели несжимаемости, учитывая ее относительную простоту и стабильность.

To calculate the inﬂuence of the turbulence term τ, referred to the unresolved small motion term in [50], the large eddy simulation (LES) mathematical model for turbulence [51] [52] was employed. According to the original LES conception, eddies capable of being resolved by the computational grid are allowed to evolve according to the Navier-Stokes equations, and a model is employed to represent the turbulence at sub-grid scales (mesh-based techniques). A sub-particle scale (SPS) model was made necessary for meshless methods. By introducing the turbulence eddy viscosity ν t , the unresolved SPS turbulence stress τ ij in Equation 2 can be written as shown in Equation 13.



where δ ij is Kronecker’s operator; and S ij is the strain rate and k is the turbulence kinetic energy, which can be incorporated into the pressure term when solving the momentum equation Equation 2. The widely used model by [51] is employed here to formulate the turbulence eddy viscosity.

**3.3 Numerical improvements**

In this section, there is a description of the implemented MPS variations. It is noteworthy that the universe of MPS variations is vast, and the ones that were selected stand between improvement impact level and implementation cost. These variations allowed a version considered sufﬁciently stable and physically accurate to be achieved. It is also shown other modiﬁcations to the standard method, which expand the range of applications of the MPS.

**3.3.1 Momentum conservation**

A simple way to achieve consistent conservation of linear momentum is to ensure a better discretization of the gradient model. subsubsection 14 shows the suggested alteration in the pressure gradient formulation by Khayyer and Gotoh [53].



When the anti-symmetric subsubsection 14 is applied, linear momentum is conserved. This method is referred to by the authors as Corrected MPS (CMPS).

**3.2.2 Турбулентный поток**

Для расчета влияния термина турбулентности τ, относящегося к неразрешенному термину малого движения в [50], использовалась математическая модель моделирования больших вихрей (LES) для турбулентности [51] [52]. В соответствии с оригинальной концепцией LES, вихрям, которые могут быть разрешены с помощью вычислительной сетки, разрешается развиваться в соответствии с уравнениями Навье-Стокса, и для представления турбулентности в масштабах подсети используется модель (методы на основе сетки). Модель масштаба субчастиц (SPS) была необходима для методов без сетки. Вводя вихревую вязкость турбулентности ν t , неразрешенное напряжение турбулентности SPS τ ij в уравнении 2 можно записать, как показано в уравнении 13.



где δ ij - оператор Кронекера; и S ij - скорость деформации, а k - кинетическая энергия турбулентности, которая может быть включена в член давления при решении уравнения 2 уравнения импульса. Широко используемая модель [51] используется здесь для формулировки вихревой вязкости турбулентности.

**3.3 Численные улучшения**

В этом разделе приведено описание реализованных вариантов MPS. Примечательно, что разнообразие вариантов MPS огромно, и те, которые были выбраны, находятся между уровнем воздействия улучшения и стоимостью внедрения. Эти изменения позволили создать версию, которая считалась достаточно стабильной и физически точной. Также показаны другие модификации стандартного метода, которые расширяют область применения MPS.

**3.3.1 Сохранение импульса**

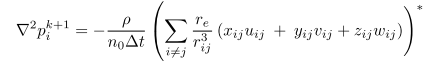
Простой способ добиться последовательного сохранения линейного импульса - обеспечить лучшую дискретизацию градиентной модели. в разделе 14 показано предлагаемое изменение в формулировке градиента давления, предложенное Хайером и Гото [53].



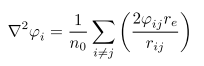
При применении антисимметричного подсекции 14 линейный импульс сохраняется. Этот метод авторы называют исправленным MPS (MPS).

**3.3.2 Pressure calculation**

One of the major issues of the MPS, and consequently widely explored, is the spurious pressure oscillation. Works that presented substantial improvements in this area, making few and simple modiﬁcations to the method, have been proposed [15, 35]. The authors call the ﬁrst one the MPS with a Higher order Source term (MPS-HS) since it presents a new formulation for the calculation of the derivative of the particle number density (Dn/Dt ). Using this variation, the Equation 8 is replaced by the Equation 15 [54].



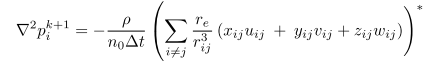
where r ij is the distance between particles i and j. x ij , y ij and z ij represent the distance between particles i and j in each dimension and u ij , v ij and w ij the velocity difference of particles i and j in each dimension. Another improvement to the implemented pressure calculation was the proposition of a higher order Laplacian model for both two and three (Equation 16) dimensional simulations [35, 54].



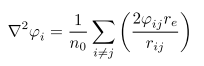
where ϕ is a generic physical quantity. This new derivation was named by the authors as MPS with a Higher order Laplacian of pressure (MPS-HL).

**3.3.2 Расчет давления**

Одной из основных проблем MPS, и, следовательно, широко изученной, является паразитное колебание давления. Были предложены работы, которые представили существенные улучшения в этой области, внеся в метод несколько простых модификаций [15, 35]. Авторы называют первый из них MPS с исходным термином более высокого порядка (MPS-HS), поскольку в нем представлена новая формулировка для расчета производной плотности числа частиц (DN Dt). Используя этот вариант, уравнение 8 заменяется уравнением 15 [54].



где r ij - расстояние между частицами i и j. x ij , y ij и z ij представляют расстояние между частицами i и j в каждом измерении, а u ij, v ij и w ij - разность скоростей частиц i и j в каждом измерении. Еще одним улучшением реализованного расчета давления стало предложение модели Лапласа более высокого порядка как для двух, так и для трехмерного моделирования (уравнение 16) [35, 54].



где ϕ - общая физическая величина. Этот новый вывод был назван авторами как NPS с лапласианом давления более высокого порядка (MAPS-HL).